Skala danych
Te same dane można wyrazić w różnych skalach. Skala h jest funkcją ciągłą i rosnącą.
Skala $j(u) = au + b$ dla $a > 0$ jest zwi ązana ze zmianą jednostek

.

1. Podaj przykłady pomiarów, wyrażonych w skali logarytmicznej (poszukaj w Internecie)

2. Oblicz wartości typowe względem odległości euklidesowej, Hamminga, Czebyszewa i taksówkowej dla danych z zad.2 (Lista1) wyrażonych w skali logarytmicznej. Porównaj z wynikami uzyskanymi dla tych danych w skali oryginalnej.

Wartość typowa w skali h dla wektora danych X względem odległości d:

$$m_h(x, d) = h^{-1} m(h(x), d)$$

Średnią quasi arytmetyczną w skali h (**średnią Kołmogorowa**) jest $m_h(X, d_2)$ czyli

$$M_h(X) = h^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(x_i)\right)$$

.

3. Oblicz wartość typową danych X w skali zmiany jednostek j względem odległości euklidesowej, Hamminga, Czebyszewa i taksówkowej.

4. Wyznacz średnią Kołmogorowa dla skal:

a) logarytmicznej $h(u) = \log(u)$ (podstawa logarytmu dowolna, większa od 1),

b) odwrotnej $h(u) = \frac{-1}{u}$,

c) kwadratowej $h(u) = u^2$

5. Pokaż, że warunek

$$\forall X \; M_g(X) = M_h(X)$$

jest równoważny warunkowi

$$\forall u \; g(u) = ah(u) + b$$

dla pewnych stałych $a > 0$ i b.

Wskazówka dla dowodu $\Longrightarrow$. Rozważ wszystkie dane postaci $X^T = [u, t]$. Pokaż, że warunek

$$\forall X \; M_g(X) = M_h(X)$$

implikuje równość

$$f\left(\frac{u+t}{2}\right) = \frac{f(u) + f(t)}{2}$$

dla $f = gh^{-1}$. Udowodnij wtedy, że $f(u) = au + b$ dla pewnych stałych $a > 0$ i b.

6. Bartłomiej Zawalski (laureat Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki 2012) udowodnił twierdzenie:

> Niech f i g będą dwukrotnie różniczkowalnymi funkcjami różnowartościowymi na przedziale $I \subseteq \mathcal{R}$. Warunek
> $$M_f(X) \geqslant M_g(X)$$
> jest spełniony dla dowolnego wektora danych X wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $x \in I$ zachodzi nierówność
> $$\frac{f''(x)}{f'(x)} \geqslant \frac{g''(x)}{g'(x)}$$

Transformacja Boxa-Coxa jest rodziną funkcji na $(0, \infty)$:

$$h_\lambda(x) = \begin{cases} \frac{x^\lambda - 1}{\lambda} & \lambda \neq 0 \\ \ln(x) & \lambda = 0 \end{cases}$$

Pokaż, że

$$M_f(X) \geqslant M_g(X)$$

gdy $f = h_\lambda$, $g = h_\mu$ i $\lambda \geqslant \mu$.

7. Średnią ważoną z wagami $[a_{1,} a_{2,} \ldots, a_n]$, $a_i \geqslant 0$, $\sum a_i = 1$ jest wartość typowa względem odległości[1]

$$d(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(x_{(i)} - y_{(i)}\right)^2$$

Średnia nazywa się symetryczna gdy wagi spełniają warunek
dla każdego $i \leqslant \frac{n}{2}$

$$a_i = a_{n+1-i}$$

Znajdź wzór na średnią ważoną z wagami $[a_{1,} a_{2,} \ldots, a_n]$.

Sprawdź, które z poznanych wartości typowych (średnia arytmetyczna, mediana, średnia Czebyszewa ...) są średnimi ważonymi i które spełniają warunek symetrii.

Niech $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$. α - uciętą średnią nazywamy średnią ważoną symetryczną o wagach

$$a_i = \begin{cases} 0 & i \leqslant [\alpha n] \\ \frac{1 - \{\alpha n\}}{n(1-2\alpha)} & i = [\alpha n] + 1 \\ \frac{1}{n(1-2\alpha)} & [\alpha n] + 1 < i \leqslant \frac{n+1}{2} \end{cases}$$

Sprawdź, że jest to rzeczywiście średnia ważona i które z poznanych wartości typowych (średnia arytmetyczna, mediana,...) są średnimi uciętymi i dla jakiego α. Jakie jest praktyczne znaczenie tego parametru?

8. Simon Newcomb (1835-1909), wybitny astronom amerykański, wykonał pomiary czasu przejścia promienia światła przez wybrany odcinek (w milionowych częściach sekundy). Dane zostały dla uproszczenia przekształcone przez funkcję $f(x) = 1000(x - 24.8)$.

---

[1] Oznaczenie $x_{(i)}$ jest i-tą uporządkowaną wartością wektora X

-44 -2 16 19 21 22 23 24 24 25 26 27 28 29 29 30 31 33 34 40

Wypełnij tabelkę i na jej podstawie naszkicuj wykres α $\rightarrow$średnia α-ucięta

α	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45
średnia α-ucięta										